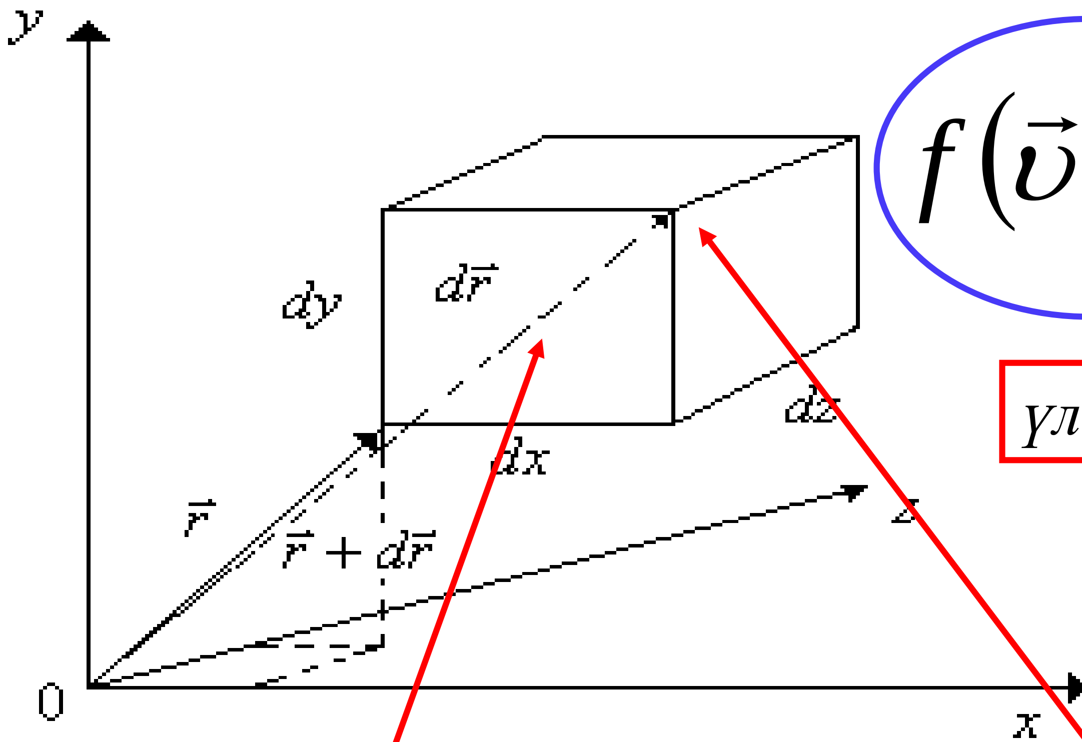
ҮЛЕСТІРІЛУ ФУНКЦИЯСЫ

Молекулалардың жылдамдықтар бойынша үлестірілуін анықтау белгілі жылдамдықпен қозғалатын молекула санын табу. Осы мәселені шешуде Максвелл ықтималдықтар теориясын қолданды. Жылдамдықтың x – компонентінің мәні υ_x-қа тең ықтималдығы, басқа екі υ_y, υ_z жылдамдық компоненттері мәндеріне байланысты болмайды. Онда молекуланың x осі бойында υ_x пен $\upsilon_x + d\upsilon_x$ аралығында жататын жылдамдық компонентіне ие болатын ықтималдығын $f(\upsilon_x)d\upsilon_x$ деп белгілеуге болады.



$$f\left(\vec{\upsilon},\vec{r},t\right)d\vec{r}d\vec{\upsilon} \qquad (1)$$

үлестірілу функциясы

Молекулалар жылдамдығы соқтығысу нәтижесінде үздіксіз өзгереді. Нәтижесінде көлемнен біразы шығып, кейбіреуі сырттан көлемге түседі.

$d\vec{r}$ көлем элементінде жылдамдықтары $\vec{\upsilon}$, $\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}$

аралығында жататын молекулалардың ықтималдық саны

$f\left(\vec{\upsilon},\vec{r},t\right)d\vec{r}d\vec{\upsilon}$ -ға тең

Молекулалардың $d\vec{r}$ көлем элементіндегі толық санын табу үшін $fd\vec{r}d\vec{\upsilon}$-ні барлық жылдамдықтар кеңістігі бойынша интегралдау керек:

$$n d\vec{r} = d\vec{r}\int f d\vec{\upsilon} = d\vec{r}\int f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)d\vec{\upsilon}\,. \qquad (2)$$

Олай болса, жылдамдықтары $\vec{\upsilon}$ және $\vec{\upsilon}+d\vec{\upsilon}$ интервалында жататын бірлік көлемдегі молекулалардың орташа саны мынаған тең болады:

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)d\vec{\upsilon} \qquad (3)$$

Координаттар остеріне қатысты молекула жылдамдығының проекциялары υ_x және $\upsilon_x + d\upsilon_x$, υ_y және $\upsilon_y + d\upsilon_y$, υ_z және $\upsilon_z + d\upsilon_z$ аралығында жататын ықтималдығы $dP(\upsilon_{x,}\upsilon_{y,}\upsilon_z)$ нормалау шарты былай жазылады:

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} dP(\upsilon_{x,}\upsilon_{y,}\upsilon_z) = 1, \qquad (4)$$

$$dP(\upsilon) = \frac{dn(\upsilon)}{n}; \qquad (5)$$

$\dfrac{dn(\upsilon)}{n}$ – газдың бірлік көлеміндегі кез келген молекуланың жылдамдығы υ және $\upsilon + d\upsilon$ интервалына жататын ықтималдығын анықтайды.

МОЛЕКУЛАЛЫҚ ЖЫЛДАМДЫҚҚА ТӘУЕЛДІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ОРТАША МӘНДЕРІ

Айталық, $\varphi(\upsilon)$ молекуланың жылдамдығына тәуелді функция болсын. Осы функцияның орташа мәнін $f(\upsilon)$ үлестірілу функциясы арқылы былай анықтаймыз:

$$\overline{\varphi(\upsilon)} = \frac{1}{n}\int_0^\infty \varphi(\upsilon) f(\upsilon) d\upsilon \quad . \qquad (6)$$

молекулалардың орташа арифметикалық жылдамдығы (6) бойынша

$$\overline{\upsilon} = \frac{1}{n}\int_0^\infty \upsilon f(\upsilon) d\upsilon$$

(1) өрнек бойынша жылдамдық компоненттері үшін келесі түрде жазамыз:

$$f\left(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z\right)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z = dn\left(\upsilon_x .\upsilon_y ,\upsilon_z\right) \tag{7}$$

Тепе-теңдік тыныштық күйдегі газда жылдамдықтар барлық бағытта бірдей, сондықтан $nP(\upsilon_x)P(\upsilon_y)P(\upsilon_z)$ ықтималдықтары барлық бағыттарда бірдей болады. Онда $f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)$ үлестірілу функциясының $d\upsilon_x, d\upsilon_y, d\upsilon_z$-ке тәуелділігі тек $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2$ жылдамдықтың абсолюттік шамасы арқылы анықталуы мүмкін.

Осы айтылған шарттар төмендегі қатынасты жазуға мүмкіндік тудырады:

$$nP(\upsilon_x)P(\upsilon_y)P(\upsilon_z) = f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z) = \phi\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right). \tag{8}$$

Бұл (8)-ші функционалдық теңдеудің шешуінің түрі былай жазылады:

$$\Phi(\upsilon_x) = Xe^{Y\upsilon_x^2}$$

(9) Онда (8) ескеріп, үлестірілу функциясын анықтаймыз:

$$f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z) = \phi\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right) = nX^3 e^{Y\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)} \tag{10}$$

мұндағы X, Y – еркінше алынған тұрақтылар.

(10) өрнектегі үлестірілу функцияны үш соқтығысу инварианттары (m_0 – молекулалық масса, $m_0\vec{\upsilon}$ – молекулалық импульс және $\frac{1}{2}m_0\upsilon^2$ – молекуланың кинетикалық энергиясы) арқылы табады:

$$f\left(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z\right)=\beta e^{-\alpha\frac{1}{2}m_0\upsilon^2}, \qquad (11)$$

мұндағы β,α – тұрақтылар, оларды газдың сандық тығыздығы $n=\int fd\vec{\upsilon}$, орташа жылдамдығы $n\overline{\upsilon}=\int \upsilon fd\upsilon$ және температурасының анықтамаларын қолданып анықтайды:

$$\frac{3}{2}kT=\frac{1}{2}m_0\overline{\upsilon^2}$$

(11)-ші теңдеудегі α тұрақтысы мынаған тең $\alpha=1/kT$, Сонымен (11)-дегі үлестірілу функциясының анық түрін Максвелл мына түрде ұсынған:

$$f\left(\upsilon\right)=n\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}, \qquad (12)$$

Осы формула молекулалар жылдамдықтарының үлестірілуі үшін анықталған *Максвелл функциясының* әдеттегі түрі.

Молекулалардың жылдамдық компоненттері бойынша үлестірілуі

Жылдамдықтары υ және $\upsilon + d\upsilon$ интервалындағы көлем бірлігіндегі молекула саны $f(\upsilon)d\upsilon$ -ға немесе $f(\upsilon_{x,}\upsilon_{y,}\upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$ тең болады. Олай болса, максвелл өрнегі бойынша жылдамдық компоненттері бойынша былай анықталады:

$$dn(\upsilon_{x,}\upsilon_{y,}\upsilon_z) = n(m_0 / 2\pi kT)^{3/2} e^{-\frac{1}{2}\frac{m_0\upsilon_x^2}{kT}} d\upsilon_x \bullet$$

$$\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{m_0\upsilon_y^2}{kT}} d\upsilon_y \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{m_0\upsilon_z^2}{kT}} d\upsilon_z \quad , \quad (13)$$

Жылдамдықтың x компоненті υ_x және $\upsilon_x + d\upsilon_x$ интервалында жататын көлем бірлігіндегі молекулалардың орташа саны $dn_x(\upsilon_x)$. Онда, нормалау шарты ((4)-ші өрнек) мына түрде жазылуы тиіс:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\upsilon_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dn_x(\upsilon_x)}{n} = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m\upsilon_x^2/2kT} d\upsilon_x = 1 \quad . \qquad (14)$$

Егер (14)- тегі e экспонентаның дәрежесін $m_0\upsilon^2 / 2kT = x^2$ деп белгілесек, онда интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m_0\upsilon^2 / 2kT} d\upsilon_x = \frac{2kT}{m_0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad \text{мұндағы :} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Сондықтан,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m_0\upsilon_x^2 / 2kT} d\upsilon_x = \sqrt{\frac{2\pi kT}{m_0}}. \tag{15}$$

Интергалдау шегі ретінде мүмкін болатын (-∞)-тен (+∞)-ке дейінгі υ_x жылдамдық мәндерін алдық. Сонда газ молекуласының жылдамдығы қандай-да бір x компонентіне ие болатын ықтималдығын анықтаймыз, яғни Максвеллдің үлестірілу функциясының жылдамдықтың x –компоненті үшін ол мынадай:

$$dn(\upsilon_x) = dn_x = n\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-m_0\upsilon_x^2 / 2kT} d\upsilon_x \tag{16}$$

немесе

$$f(\upsilon_x) = n\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-m_0\upsilon_x^2 / 2kT}. \tag{17}$$

(6) өрнектен жылдамдықтың x компонентінің орташа мәні былай анықталады:

$$\prec \upsilon_x \succ = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon_x f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z \qquad (18)$$

$$\prec \upsilon_x \succ = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{+\infty} \upsilon_x \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-m_0\upsilon_x^2/2kT} d\upsilon_x = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha} = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{m_0}{2kT}}$$

Интегралдың алдындағы шама оң таңбалы ($+\upsilon_x$)-қа – оң, ал ($-\upsilon_x$) – теріс таңбалы, υ_x-тің дәрежесі тақ, сондықтан оның орташа мәні ноль,

$$\prec \upsilon_x \succ = \prec \upsilon_y \succ = \prec \upsilon_z \succ = 0 \qquad (19)$$

Бірақ жылдамдық компонентінің модулінің орташа мәні ноль болмайды. Жылдамдықтың *x* – компонентінің модулінің орташа арифметикалық мәнін :

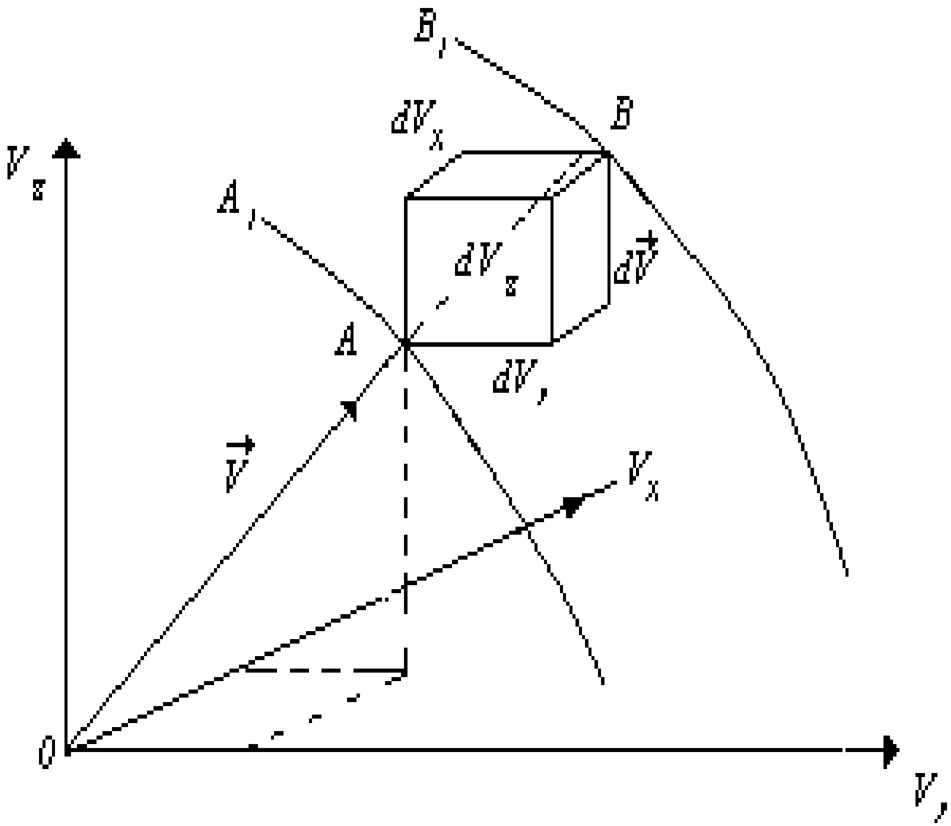
$$\prec \left|\upsilon_x\right| \succ = \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\left|\upsilon_x\right| f\left(\upsilon_x\right) d\upsilon_x \qquad (20)$$

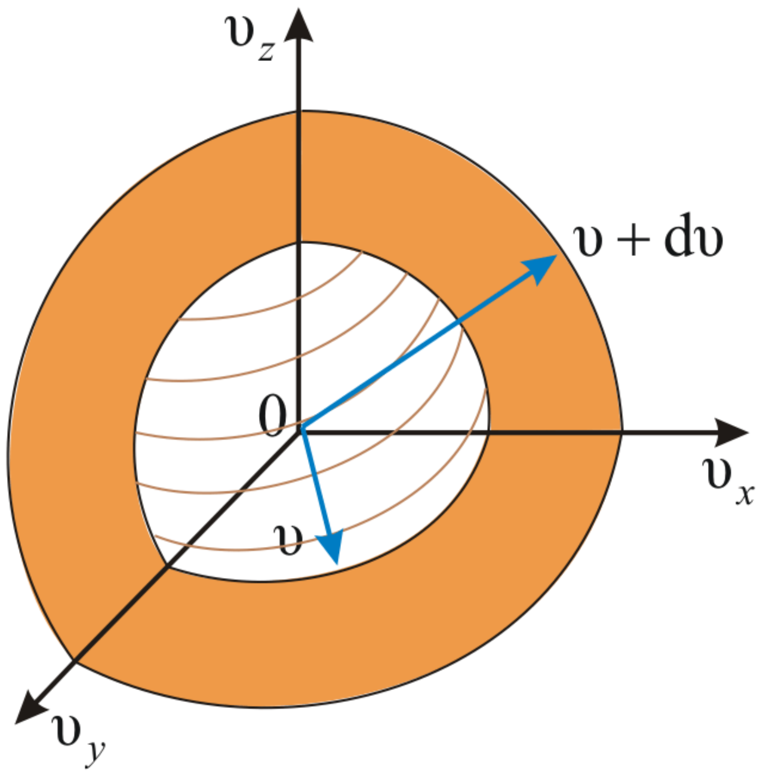
$\upsilon_x > 0$ үшін анықтаймыз.

Сондықтан, (20)-ның интегралдау шегі 0 мен ∞ аралығында алынады (17)-ші формула бойынша:

$$\prec \left|\upsilon_x\right| \succ = \frac{1}{n}\int_0^{\infty}\left|\upsilon_x\right| n\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-m_0\upsilon_x^2/2kT} d\upsilon_x \qquad (21)$$

МОЛЕКУЛАЛАРДЫҢ ЖЫЛДАМДЫҚТАР МОДУЛІ БОЙЫНША ҮЛЕСТІРІЛУІ





n молекулалардың ішінде жылдамдықтары $\upsilon \equiv \left|\vec{\upsilon}\right|$ -ға тең, мәндері υ және $\upsilon + d\upsilon$ интервалында жататын, көлем бірлігіндегі $dn(\upsilon)$ молекулалардың санын анықтайық.

Молекула декарт координаттар жүйесінің басында орналасты делік және олардың жылдамдығы

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$$

Жылдамдықтары υ және $\upsilon + d\upsilon$ аралығында жататын молекулалар саны

$$dn(\upsilon) = 4\pi\upsilon^2 f(\upsilon) d\upsilon \qquad (22)$$

(22)-ші теңдеу бойынша υ және $(\upsilon + d\upsilon)$ сфералық қабаттағы молекулалар санын (12)-ші өрнек бойынша

$$\boxed{\frac{dn(|\vec{\upsilon}|)}{n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n \left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} \upsilon^2 e^{-m_0\upsilon^2/2kT} d\upsilon} \qquad (23)$$

Жылдамдықтар бойынша молекулалардың үлестірілу заңы немесе *Максвелл заңы*

Молекулалардың орташа жылдамдықтары. Орташа арифметикалық жылдамдық

$$\prec \upsilon \succ = \frac{1}{n}\int_0^\infty \upsilon f\left(\left|\vec{\upsilon}\right|\right) d\upsilon = \frac{4n}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \upsilon^3 e^{-m_0\upsilon^2/2kT} d\upsilon$$

орташа арифметикалық жылдамдық

$$\frac{m_0}{2kT} = \alpha \qquad \upsilon = x$$ деп белгілесек, онда

$$\int_0^\infty \upsilon^3 e^{-m_0\upsilon^2/2kT} d\upsilon = \int_0^\infty x^3 e^{-\alpha x^2} dx \quad (1)$$

(1) интегралдардың мәнін келесі есептеу ережелерін қолданып, табамыз:

а) егер r - жұп сан болса, онда

$$\int_0^\infty x^r e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{r-1}{2} \alpha^{-\left(\frac{r+1}{2}\right)} \qquad (2)$$

б) егер r – тақ сан болса, онда

$$\int_0^\infty x^r e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \alpha^{-\left(\frac{r+1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{r-1}{2}\right) \qquad (3)$$

(3) бойынша $$\int_0^{\infty} \upsilon^3 e^{-m_0\upsilon^2/2kT} d\upsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{-2} \qquad (4)$$

Егер (3)-ге (4)-тегі интегралдың өрнегін қоссақ:

$$\prec \upsilon \succ = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{-2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} \frac{1}{2}\left(\frac{2kT}{m_0}\right)^{2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$

демек $\prec \upsilon \succ = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}$ немес $\prec \upsilon \succ = \sqrt{\dfrac{8N_A\,kT}{\pi N_A m_0}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$ (5)

орташа арифметикалық жылдамдық

Молекулалардың орташа квадраттық жылдамдығы

Жылдамдықтың квадратының орташа мәні

$$\langle \upsilon^2 \rangle = \frac{1}{n}\int_0^\infty \upsilon^2 f(\upsilon) d\upsilon = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2}\int_0^\infty \upsilon^4 e^{-m_0\upsilon^2/2kT} d\upsilon \qquad (6)$$

$$\boxed{\int_0^\infty \upsilon^4 e^{-m\upsilon^2/2kT} d\upsilon = \int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{-5/2}}$$

молекулалардың орташа квадраттық жылдамдығы мынаған тең болады:

$$\prec \upsilon^2 \succ = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{2kT}{m_0}\right)^{5/2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2kT}{m_0} = \frac{3kT}{m_0} \qquad (7)$$

демек

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{\prec \upsilon^2 \succ} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \qquad (8)$$

.

Жылдамдық орташа арифметикалық жылдамдықпен тең болмайды

$$\bar{\upsilon} = \sqrt{\overline{\upsilon^2}} = \bar{\upsilon}\sqrt{\left(\frac{3\pi}{8}\right)} = 1{,}086\,\bar{\upsilon} \qquad (9)$$

ЕҢ ЫҚТИМАЛ ЖЫЛДАМДЫҚ

Үлестірілу функцияның максимал мәніне сәйкес келетін жылдамдықтың төңірегінде топталатын молекулалардың мәні ең үлкен болады. Онда осы жылдамдық Максвелл үлестірілуінің қисығының ең жоғарғы мәнімен анықталады және *ең ықтимал жылдамдық* деп аталады.

Ең ықтимал жылдамдықты табу үшін, $f(\upsilon)$ үлестірілу функциясының бірінші туындысын жылдамдық бойынша нолге теңестіріп, $\upsilon_{ы\acute{к}}$ -ты былай табамыз:

$$\frac{d}{d\upsilon} f(\upsilon) = \frac{d}{d\upsilon}\left[\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m_0}{2kT}\right)^{3/2} \upsilon^2 e^{-m_0\upsilon^2/2kT}\right] = 0$$

Бұл теңдік орындалады, егер

$$\frac{d}{d\upsilon}\left(\upsilon^2 e^{-m_0\upsilon^2/2kT}\right) = 0 \qquad (10)$$

(10) теңдеуді дифференциалдаймыз:

$$2\upsilon e^{-m_0\upsilon^2/2kT} - \upsilon^2 e^{-m_0\upsilon^2/2kT} \cdot 2\upsilon \frac{m_0}{2kT} = 0$$

немесе

$$2\upsilon e^{-m_0\upsilon^2/2kT}\left(1 - \frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right) = 0 \qquad (11)$$

Осы (11)-ші теңдеуді қанағаттандыратын шарттар немесе $\upsilon = 0$, немесе $\upsilon = \infty$ және $\left(1 - \frac{m_0\upsilon^2}{2kT}\right) = 0$.

Сондықтан, жақшадағы шаманы нолге айналдыратын жылдамдықтың υ мәні шартынан іздеп отырған $\upsilon_{ық}$ -тің мәні табылады:

$$1-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}=0 \qquad (12)$$

$$\upsilon_{ық}=\sqrt{\frac{2kT}{m_o}} \qquad (13) \qquad\qquad \frac{m_0\upsilon_{ық}{}^2}{2}=kT \qquad (14)$$

Осыған орай, ең ықтимал жылдамдыққа сәйкес келетін молекуланың кинетикалық энергиясы kT -ға тең болады.